

Subiectul I.1

PROGRESII

ARITMETICE	GEOMETRICE
Notații	
$\div (a_n)_{n \geq 1} \Leftrightarrow \div a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ $a_n = \begin{cases} \text{termenul general al progresiei} \\ \text{sau} \\ \text{termenul de rang } n \end{cases}$	$\div (b_n)_{n \geq 1} \Leftrightarrow \div b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ $b_n = \begin{cases} \text{termenul general al progresiei} \\ \text{sau} \\ \text{termenul de rang } n \end{cases}$
Exemplu	
$\div 2, 5, 8, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases}$ \Downarrow $\div 2^{+3}, 5^{+3}, 8^{+3}, 11^{+3}, \dots$	$\div 2, 6, 18, 54, \dots \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$ \Downarrow $\div 2 \cdot 3, 6 \cdot 3, 18 \cdot 3, 54 \cdot 3, \dots$

Definiție (Formula de recurență)	
$a_{n+1} = a_n + r, \forall n \in \mathbb{N}^*$	$b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Rația unei progresii	
$r = a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$	$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (b_n \neq 0) \forall n \in \mathbb{N}^*$

CELE MAI UTILIZATE FORMULE

Formula termenului general	
$a_n = a_1 + (n - 1)r, \forall n \in \mathbb{N}^*$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Suma primilor n termeni ai progresiei	
$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ $S_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ dacă } q \neq 1 \\ n \cdot b_1, \text{ dacă } q = 1 \end{cases}$
Condiția ca trei numere să fie termeni consecutivi ai unei progresii	
$\div A, B, C \Leftrightarrow 2B = A + C$	$\div A, B, C \Leftrightarrow B^2 = A \cdot C$

LOGARITMI

Definiție	
$a^x = N \Rightarrow x = \log_a N$, unde $a > 0, a \neq 1, N > 0$	
Condițiile de existență ale logaritmului	
$\log_a N : \begin{cases} a > 0 \text{ (baza } > 0) \\ a \neq 1 \text{ (baza } \neq 1) \\ N > 0 \text{ (cantitatea } > 0) \end{cases}$	
Logaritmul zecimal	Logaritmul natural
$\lg x = \log_{10} x$	$\ln x = \log_e x$, unde $e \simeq 2,71$ (numărul lui Euler)
Proprietăți ale logaritmilor	
1. $\log_a 1 = 0$	2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	4. $a^{\log_a x} = x$
5. $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$	6. $\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

7.	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
Formule de schimbare a bazei logaritmului	
8.	$\log_a^n x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$
9.	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
10.	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
11.	$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$
Monotonia funcției logaritmice	
$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$	
I. Dacă $a \in (0, 1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) > \log_a(x_2)$	
II. Dacă $a \in (1, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$	
Monotonia funcției exponențiale	
$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$	
I. Dacă $a \in (0, 1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$	
II. Dacă $a \in (1, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$	

PUTERI ȘI RADICALI

PUTERI			
Definiție putere			
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$			
$a^n = \begin{cases} a = \text{baza puterii} \\ n = \text{exponentul puterii} \end{cases}$			
Proprietăți puteri			
1.	$a^0 = 1$	2.	$1^n = 1$
3.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	4.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	6.	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
7.	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$	8.	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
9.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	10.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

RADICALI	
Radicalul de ordin 2	Radicalul de ordin 3
<i>Condiții de existență ale radicalului de ordin 2 (de ordin par)</i>	<i>Condiții de existență ale radicalului de ordin 3 (de ordin impar)</i>
$\sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$ <i>(expresia de sub semnul radical ≥ 0)</i>	Nu există
Proprietăți ale radicalilor	
1.	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
2.	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3.	$(\sqrt{a})^2 = a$
4.	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
5.	$\sqrt[n]{x^q} = x^{\frac{q}{n}}$

NUMERE COMPLEXE (\mathbb{C}) – forma algebrică

Definiție			
$z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$			
Notații			
$a =$ partea reală a numărului complex z $a = \text{Re}(z)$ – realul lui z		$bi =$ partea imaginară a numărului complex z $b = \text{Im}(z)$ – imaginarul lui z	
$i^2 = -1$ $i =$ unitate imaginară			
Proprietăți			
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow b = 0$		$z = 0 \Leftrightarrow (\text{Re}(z) = 0 \text{ și } \text{Im}(z) = 0)$ $(a = 0 \text{ și } b = 0)$	
Egalitatea a două numere complexe			
$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ și } b_1 = b_2$			
Conjugatul lui z		Modulul lui z	
$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$		$ z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Proprietăți (cele mai utilizate)			
1.	$ z = \bar{z} $	4.	$ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $
2.	$ z^n = z ^n$	5.	$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }, z_2 \neq 0$
3.	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$	6.	$ z ^2 = z \cdot \bar{z}$
Raportul a două numere complexe			
$=$ se calculează prin amplificarea lui (raportului) cu conjugatul numitorului			
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{\underbrace{c^2 + d^2}_{\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}} + \frac{bc - ad}{\underbrace{c^2 + d^2}_{\text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}} i$			
Puterile lui i			
$i^1 = i$	$i^{4n+1} = i$	$i^2 = -1$	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^{4n+3} = -i$	$i^4 = 1$	$i^{4n} = 1$
Rezolvarea în \mathbb{C} a ecuației de grad II cu coeficienți reali			
$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$			
$\Delta = b^2 - 4ac, \Delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$			
$x^2 = a, a < 0 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{-a}$			

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

PARTEA ÎNTREAGĂ ȘI PARTEA FRACTIONARĂ A UNUI NUMĂR REAL

Partea întregă a unui număr real x			
Notăție		Definiție	
$[x] = \text{partea întregă a lui } x$		$[x] = \text{cel mai mare întreg mai mic decât } x$ $[x] = n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$	
Partea fracționară a numărului real x			
Notăție		Definiție	
$\{x\} = \text{partea fracționară a lui } x$		$\{x\} = x - [x]$	
Proprietăți			
1.	$x - 1 < [x] \leq x$	3.	$\{x\} \in [0, 1)$
2.	$[x + n] = [x] + n, n \in \mathbb{Z}$	4.	$\{x + n\} = \{x\}, n \in \mathbb{Z}$
5.	$x = [x] + \{x\}$		

MODULUL UNUI NUMĂR REAL

Definiție	$ x = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$
Proprietăți	$ x \leq A \Leftrightarrow -A \leq x \leq A, A \in \mathbb{R}_+$
	$ x \geq A \Leftrightarrow x \leq -A \text{ sau } x \geq A, A \in \mathbb{R}_+$

Subiectul I.2

FUNCTȚII – definiții și proprietăți

Notății	
$f: A \rightarrow B, x \rightarrow f(x)$	$A = \text{domeniul funcției}$ $B = \text{codomeniul funcției}$ $f(x) = \text{leaga de corespondență a funcției}$
$A(x, y) \in Gf \Leftrightarrow f(x) = y$	
$f(\text{prima coordonată}) = \text{a doua coordonată}$	
$x (\text{prima coordonată}) = \text{abscisa punctului}$	
$y (\text{a doua coordonată}) = \text{ordonata punctului}$	

Intersecția cu axele de coordonate ale Gf
$\text{Intersecția cu axa absciselor (cu } Ox)$ $Gf \cap O_x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
$\text{Intersecția cu axa ordonateilor (cu } Oy)$ $Gf \cap O_y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0)$

Determinarea coordonatelor punctelor de intersecție a două grafice (Gf și Gg)
1. Se rezolvă ecuația $f(x) = g(x)$ pentru determinarea abscisei
2. Se determină ordonata punctului

Compunerea funcțiilor
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

FUNCTȚII – definiții și proprietăți

Funcții pare. Funcții impare	
$f: A \rightarrow \mathbb{R}, A - \text{mulțime simetrică } (-x \in A, \forall x \in A)$	
$f - \text{pară} \Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in A$	$f - \text{impară} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in A$
Funcții periodice	
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică cu perioada T dacă $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$ și $x+T \in D$ Cea mai mică perioadă nenulă pozitivă (dacă există) s.n. perioadă principală	
Imaginea unei funcții (mulțimea de valori a funcției)	
$f: A \rightarrow B$	
$Imf = \{y \in B \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y\}$ sau $Imf = f(A) = \{f(x) x \in A\}$	
Funcții injective – definiții	
$f: A \rightarrow B$ este funcție injectivă dacă:	
1.	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ [$x_1, x_2 \in A$ fixați]
2.	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ [$x_1, x_2 \in A$ fixați]
3.	f este strict monotonă (Analiză matematică)
Obs.	$f: A \rightarrow B$ nu este funcție injectivă dacă: $\exists x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$
Funcții surjective – definiții	
$f: A \rightarrow B$ este funcție surjectivă dacă:	
1.	$[\forall y \in B \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y] \Leftrightarrow$ [pentru $\forall y \in B$ ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție în A]
2.	$Imf = B$
Funcții bijective – definiții	
$f: A \rightarrow B$ este funcție bijectivă dacă:	
1.	f este injectivă și surjectivă
2.	$[\forall y \in B \exists! x \in A \text{ a.î. } f(x) = y] \Leftrightarrow$ [pentru $\forall y \in B$ ecuația $f(x) = y$ are soluție unică în A]
Funcții inversabile	
$f: A \rightarrow B$ este funcție inversabilă dacă:	
f este bijectivă	
Inversa unei funcții	
$f: A \rightarrow B$, funcție bijectivă, are inversa :	
$f^{-1}: B \rightarrow A$ cu proprietatea $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), x \in A, y \in B$	
$f(f^{-1}(x)) = x, x \in B$ și $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$	
Funcții monotone	
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este monoton crescătoare dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este monoton descrescătoare dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$	
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este strict descrescătoare dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$	

FUNCȚIA DE GRADUL I

Forma generală a funcției	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	
Monotonia funcției	
1.	Dacă $a < 0$ atunci f este <i>strict descrescătoare</i>
2.	Dacă $a > 0$ atunci f este <i>strict crescătoare</i>
Semnul funcției	
Se rezolvă ecuația $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$	
x	$-\infty$ $-\frac{b}{a}$ $+\infty$
$f(x)$	$semn\ contrar\ a$ 0 $semn\ a$

FUNCTIA DE GRADUL al II – lea

Forma generală a funcției	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	

Ecuația de gradul al doilea	
$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	
$\Delta = b^2 - 4ac$	
Cazul I	Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ecuația are două soluții reale distincte } (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2) \\ x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right.$
Cazul II	Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ecuația are două soluții reale egale } (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2) \\ x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \end{array} \right.$
Cazul III	Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow \text{ecuația nu are soluții reale } (\nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

Semnul funcției de gradul al doilea																										
Cazul I	Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow \text{ecuația are două soluții reale distincte } (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{pp } x_1 < x_2)$ <table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">x_1</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">x_2</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">$f(x)$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{Semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0		$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0		$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0		$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																						
$f(x)$	$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0																						
	$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0																						
	$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0																						
	$\text{Semn } a$	0	$\text{Semn } a$	0																						
Cazul II	Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow \text{ecuația are două soluții reale egale } (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2)$ <table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">x_1</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">$f(x)$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{semn } a$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{semn } a$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$f(x)$	$\text{semn } a$	0	$\text{semn } a$																	
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$																							
$f(x)$	$\text{semn } a$	0	$\text{semn } a$																							
Cazul III	Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow \text{ecuația nu are soluții reale } (\nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ <table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="2" style="padding: 5px; text-align: center;">$\text{semn } a$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	$\text{semn } a$																				
x	$-\infty$	$+\infty$																								
$f(x)$	$\text{semn } a$																									

Relațiile lui Viete	
$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x_1, x_2$ rădăcinile ecuației	
$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (suma rădăcinilor)	$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (produsul rădăcinilor)
Suma pătratelor rădăcinilor $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$	

Formarea ecuației de gradul al doilea cu rădăcinile x_1, x_2
Se calculează $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 \cdot x_2$. Ecuația cu rădăcinile x_1, x_2 este: $x^2 - Sx + P = 0$

Graficul funcției de gradul al doilea	
<i>Se numește parabolă. Parabola are un punct de extrem, numit vârf și notat cu V.</i>	
Coordonatele vârfului : $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	
Dacă $a < 0 \Rightarrow$	<i>funcția admite maxim (V este punct de maxim)</i> valoarea maximă a funcției sau maximul funcției este $f_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$
Dacă $a > 0 \Rightarrow$	<i>funcția admite minim (V este punct de minim)</i> valoarea minimă a funcției sau minimul funcției este $f_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$
Ecuația axei de simetrie a parabolei este: $x = -\frac{b}{2a}$	
Poziția parabolei (graficului funcției de grad II) față de axa Ox	
Parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte (Ox este secantă parabolei)	$\Leftrightarrow \Delta > 0$
Parabola este tangentă axei Ox	$\Leftrightarrow \Delta = 0$
Parabola nu intersectează axa Ox (parabola este situată deasupra axei Ox ($a > 0$) sau este situată sub axa Ox ($a < 0$))	$\Leftrightarrow \Delta < 0$

Monotonia și imaginea funcției de gradul al doilea									
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$									
Se calculează coordonatele vârfului $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$									
Dacă $a < 0 \Rightarrow V$ este punct de maxim									
<table style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$-\frac{b}{2a}$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\nearrow \nearrow$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$-\frac{\Delta}{4a}$ <i>max</i></td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\searrow \searrow$</td> </tr> </table> $Imf = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$		x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$	$\nearrow \nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ <i>max</i>	$\searrow \searrow$
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$						
$f(x)$	$\nearrow \nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ <i>max</i>	$\searrow \searrow$						
f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$	f este strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$								
Dacă $a > 0 \Rightarrow V$ este punct de minim									
<table style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$-\frac{b}{2a}$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\searrow \searrow$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$-\frac{\Delta}{4a}$ <i>min</i></td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\nearrow \nearrow$</td> </tr> </table> $Imf = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$		x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$	$\searrow \searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ <i>min</i>	$\nearrow \nearrow$
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$						
$f(x)$	$\searrow \searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ <i>min</i>	$\nearrow \nearrow$						
f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$	f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$								

Subiectul I.3

ECUAȚII

Ecuatii iraționale	
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$
1. Se pun condiții de existență	
<i>C.E.</i> $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	<i>Nu există C.E.</i>
Eliminarea radicalului (prin ridicarea la putere) și rezolvarea ecuației obținute	
$(\sqrt{f(x)})^2 = (g(x))^2 \Rightarrow f(x) = (g(x))^2$	$(\sqrt[3]{f(x)})^3 = (g(x))^3 \Rightarrow f(x) = (g(x))^3$
Verificarea soluției	

Ecuatii exponențiale			
1.	$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$	2.	$a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a b$
3.	Cu ajutorul notațiilor și a proprietăților puterilor		

Ecuatii logaritmice	
1.	$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ <i>C.E.</i> $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$
2.	$\log_a f(x) = N \Rightarrow f(x) = a^N$ <i>C.E.</i> $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$
3.	Cu ajutorul notațiilor

Ecuții trigonometrice
Ecuții trigonometrice fundamentale
$\sin x = a, a \in [-1,1] \Rightarrow x = (-1)^k \cdot \arcsin a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \in [-1,1] \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Ecuții trigonometrice de forma $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$ și $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$
$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow f(x) = (-1)^k \cdot g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \cos f(x) \neq 0, \cos g(x) \neq 0$
Ecuții trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebră (notații)
Cele mai utilizate formule trigonometrice sunt:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ și $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$
Ecuții de forma $a \cos x + b \sin x + c = 0, a, b \neq 0$
(<i>O metodă</i>) Prin utilizarea substituției $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ și a formulelor trigonometrice
$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ și } \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$
<i>Observație!</i>
Funcția trigonometrică tg nu este definită pe întreaga mulțime a numerelor reale (\mathbb{R}) ducând astfel la pierderea unor eventuale soluții de forma $(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Prin urmare este necesară verificarea valorilor de forma $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

Subiectul I.4

METODE DE NUMĂRARE

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, n \in \mathbb{N}$ $n!$ se citește „ <i>n factorial</i> ” $0! = 1$
Permutări = numără câte mulțimi ordonate se pot forma cu n elemente distincte
$P_n = n!$
Aranjamente = numără câte submulțimi ordonate de k elemente se pot forma cu n elemente distincte
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$
Combinări = numără câte submulțimi de k elemente se pot forma cu n elemente distincte
$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$

Binomul lui Newton	
$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$ $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n = \text{coeficienți binomiali}$	
Formula termenului general	
$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k, 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$	
Suma coeficienților binomiali	
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$	
Suma coeficienților binomiali de rang par	Suma coeficienților binomiali de rang impar
$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$	$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

Formule de numărare
Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n
Numărul funcțiilor $f: A \rightarrow B$ este $\text{card } B^{\text{card } A}$
Numărul funcțiilor bijective $f: A \rightarrow A$ este $(\text{card } A)!$
Ne amintim! $\text{Card } A$ = numărul de elemente al mulțimii A

PROBABILITĂȚI

$P = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}}$

MATEMATICI FINANCIARE

Procente		
$p\% \text{ din } x = \frac{p}{100} \cdot x$		
<i>Scumpirea prețului unui produs</i>		<i>Reducerea prețului unui produs</i>
Datele problemei	$x =$ prețul inițial al produsului $p =$ procentul cu care se scumpește $p_{final} =$ prețul după scumpire	$x =$ prețul inițial al produsului $p =$ procentul cu care se reduce $p_{final} =$ prețul după reducere
Formulă	$x + \frac{p}{100} \cdot x = p_{final}$	$x - \frac{p}{100} \cdot x = p_{final}$

T.V.A. = taxa pe valoarea adăugată	
Datele problemei	$x =$ prețul inițial (de producție) al produsului $p =$ procentul T.V.A. $p_v =$ prețul de vânzare al produsului
Formule	$x + \frac{p}{100} \cdot x = p_v$
	$T.V.A. = p_v - x$

Dobânda simplă	
Datele problemei	$D =$ dobânda obținută la finalul perioadei de timp (în lei) $S =$ suma depusă inițial la bancă (în lei) $r =$ rata dobânzii (%) $n =$ perioada de timp (în ani) $S_{finală} =$ suma obținută după perioada de timp (în lei)
Formule	$D = S \cdot \frac{r}{100} \cdot n$
	$S_{finală} = S + D$

Dobânda compusă	
Datele problemei	$D =$ dobânda obținută la finalul perioadei de timp (în lei) $S =$ suma depusă inițial la bancă (în lei) $r =$ rata dobânzii (%) $n =$ perioada de timp (în ani) $S_{finală} =$ suma obținută după perioada de timp (în lei)
Formule	$D = S \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{100} \right)^n - 1 \right]$
	$S_{finală} = S + D = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$

Subiectul I.5

GEOMETRIE ANALITICĂ

I. Distanța dintre două puncte (Lungimea unui segment)	
Datele problemei	Formulă
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
II. Coordonatele mijlocului unui segment	
Datele problemei	Formulă
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului AB , unde $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

III. Panta unei drepte (m)	
Datele problemei	Formulă
$\alpha = \sphericalangle$ format de dreapta d cu axa Ox	$m_d = \operatorname{tg} \alpha$ (coeficient unghiular)
Ecuția generală a dreptei: $d: ax + by + c = 0, b \neq 0$	$m_d = -\frac{a}{b}$
Ecuția explicită a dreptei $d: y = mx + n$	$m_d = m$ (coeficientul lui x)
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, x_B \neq x_A$

IV. Determinarea ecuației unei drepte	
Datele problemei	Formulă
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, x_B \neq x_A, y_B \neq y_A$ $AB: x = x_A, \text{ dacă } x_B = x_A$ $AB: y = y_A, \text{ dacă } y_B = y_A$
$A(x_A, y_A)$ și panta dreptei d m_d	$d: y - y_A = m_d(x - x_A)$

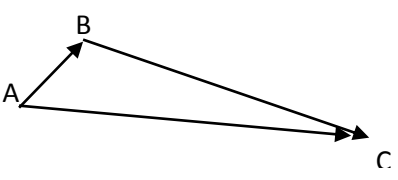
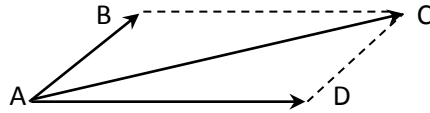
<u>Să ne amintim!</u>	Mediatoarea unui segment este perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului
	Înălțimea este perpendiculara dusă dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă
	Mediana este segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse

V. Pozițiile relative a două drepte	
$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$
SAU	
$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$	$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$
d_1, d_2 drepte concurente $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	
<i>Observație! Coordonatele punctului de intersecție</i> a două drepte reprezintă soluția sistemului format din ecuațiile celor două drepte.	
$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$	$d_1 = d_2$ (d_1, d_2 coincid) $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

VI. Aria unui triunghi	
Datele problemei	Formulă
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$	$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \Delta $, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$
VII. Coliniaritatea a trei puncte distincte în plan	
Datele problemei	Formulă
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$	A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \Delta = 0$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

VIII. Distanța de la un punct la o dreaptă	
Datele problemei	Formulă
Coordonatele punctului $A(x_A, y_A)$ Ecuația generală a dreptei $d: ax + by + c = 0$	$d(A, d) = \frac{ ax_A + by_A + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
<u>Aplicație!</u>	Determinarea lungimii unei înălțimi $A(x_A, y_A) \in d \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$
IX. Coordonatele centrului de greutate al unui triunghi	
Datele problemei	Formulă
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$	$G(x_G, y_G)$ centrul de greutate al ΔABC , unde $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ și $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
<u>Să ne amintim!</u>	Centrul de greutate al unui Δ (G) reprezintă punctul de intersecție al medianelor unui Δ .

VECTORI

Definiții și notații	
Vector = mărime fizică, caracterizată prin direcție, sens, lungime	
\overrightarrow{AB} <i>A = originea vectorului;</i> <i>B = extremitatea vectorului;</i> <i>dreapta AB = dreapta suport a vectorului</i> $ \overrightarrow{AB} = AB$ (lungimea vectorului \overrightarrow{AB})	
Doi vectori au aceeași direcție dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.	
Doi vectori au același sens dacă extremitățile lor sunt de aceeași parte a dreptei determinată de originile vectorilor.	
Doi vectori sunt egali dacă au aceeași direcție, lungime și același sens.	
Doi vectori sunt opuși dacă au aceeași direcție, lungime și sensuri opuse. Notăm: $\vec{v} = -\vec{u}$.	
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$	
Vectorul nul este vectorul cu lungime 0. Notăm: $\vec{0} = \text{vectorul nul}$.	
$ \overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0$	
Doi vectori sunt coliniari dacă au aceeași direcție.	
\vec{u}, \vec{v} coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ a.î. } \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}, \vec{v} \neq \vec{0}$	
Adunarea vectorilor necoliniari	
<i>Regula triunghiului</i>	<i>Regula paralelogramului</i>
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, unde ABCD paralelogram
	
Vectorul de poziție al mijlocului unui segment	
M mijlocul lui $AB \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, pentru orice punct O din plan	
Vectori în reper cartezian	
$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{v}(x, y)$	$ \vec{v} = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$	
$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$	$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$
\vec{v}_1, \vec{v}_2 coliniari $\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$	
Produsul scalar	
$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$	$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot \cos(\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2))$
$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$	

Subiectul I.6

ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

Cercul trigonometric					
	0	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	$2\pi = 360^\circ$
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$		
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$		
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		
Semnul funcțiilor trigonometrice					
$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ [x \nlessdot ascuțit] Cadran I	$\sin x > 0$ $\cos x > 0$		$x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ Cadran III	$\sin x < 0$ $\cos x < 0$	
$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ [x \nlessdot obtuz] Cadran II	$\sin x > 0$ $\cos x < 0$		$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ Cadran IV	$\sin x < 0$ $\cos x > 0$	

Proprietăți ale funcțiilor trigonometrice	
<i>Mărginirea</i>	
$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$	$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
<i>Paritatea</i>	
$\sin(-x) = -\sin x$	$tg(-x) = -tg x$
$\cos(-x) = \cos x$	$ctg(-x) = -ctg x$
<i>Observație! cos este funcției pară, sin, tg, ctg funcții impare</i>	
<i>Periodicitatea</i>	
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$	$tg(x + k\pi) = tg x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$	$ctg(x + k\pi) = ctg x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi), k \in \mathbb{Z}$

Formule trigonometrice	
<i>Formula fundamentală a trigonometriei</i>	
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$	
$\sin(90^\circ - x) = \cos x$	$\sin(180^\circ - x) = \sin x$
$\cos(90^\circ - x) = \sin x$	$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$	$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$
$tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$ctg x = \frac{\cos x}{\sin x}$

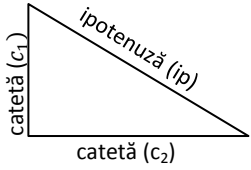
$tg(a + b) = \frac{tg a + tg b}{1 - tga tgb}$	$tg(a - b) = \frac{tg a - tg b}{1 + tga tgb}$
$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$	$tg \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$	$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$
<i>Transformarea unor sume în produs</i>	
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$

Funcții trigonometrice inverse

<p>arcsin $x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$</p> <p>$\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$</p> <p>$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1, 1]$</p> <p>arcsin$(-x) = -\arcsin x, \forall x \in [-1, 1]$</p>	<p>arctg $x : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$</p> <p>$\arctg(\operatorname{tg} x) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$</p> <p>$\operatorname{tg}(\arctg x) = x, \forall x \in [-1, 1]$</p> <p>arctg$(-x) = -\arctg x, \forall x \in \mathbb{R}$</p>
<p>arccos $x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$</p> <p>$\arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0, \pi]$</p> <p>$\cos(\arccos x) = x, \forall x \in [-1, 1]$</p> <p>arccos$(-x) = \pi - \arccos x, \forall x \in [-1, 1]$</p>	<p>arcctg $x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$</p> <p>$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \forall x \in (0, \pi)$</p> <p>$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \forall x \in [-1, 1]$</p> <p>arcctg$(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \forall x \in \mathbb{R}$</p>

APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Teorema cosinusului							
ΔABC oarecare $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$ $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$ $\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC}$							
Teorema sinusurilor							
ΔABC oarecare $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ <p style="text-align: center;">$R = \text{raza cercului circumscris } \Delta ABC$</p>							
<p><i>Observație!</i> Aplic teorema cosinusului dacă</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><i>Ipoteză</i></th> <th style="padding: 5px;"><i>Concluzie</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">Toate laturile triunghiului</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">\sphericalangle sau $\cos \sphericalangle$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">2 laturi și \sphericalangle dintre ele</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">a 3 –a latură</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">altfel aplic teorema sinusurilor.</p>		<i>Ipoteză</i>	<i>Concluzie</i>	Toate laturile triunghiului	\sphericalangle sau $\cos \sphericalangle$	2 laturi și \sphericalangle dintre ele	a 3 –a latură
<i>Ipoteză</i>	<i>Concluzie</i>						
Toate laturile triunghiului	\sphericalangle sau $\cos \sphericalangle$						
2 laturi și \sphericalangle dintre ele	a 3 –a latură						
Aria unui triunghi oarecare							
$A_{\Delta} = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\sphericalangle\alpha)}{2}, \sphericalangle\alpha = \sphericalangle \text{ format de } l_1 \text{ și } l_2$							
$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$	$A_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ $p = \frac{a + b + c}{2}, a, b, c \text{ laturile } \Delta$						
Raza cercului circumscris Δ	Raza cercului înscris în Δ						
$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A_{\Delta}}$	$r = \frac{A_{\Delta}}{p}$						

Triunghiul dreptunghic	
	<p>Teorema lui Pitagora</p> $ip^2 = c_1^2 + c_2^2$
<p>Aria triunghiului</p> $A_{\Delta} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$	<p>Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei</p> $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$
<p>Mediana corespunzătoare ipotenuzei</p> $mediana = \frac{ip}{2}$	<p>Raza cercului circumscris Δ</p> $R = \frac{ip}{2}$
Funcții trigonometrice	
$\sin \alpha = \frac{\text{cateta opusă } \alpha}{ip}$	$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateta opusă } \alpha}{\text{cateta alăturată } \alpha}$
$\cos \alpha = \frac{\text{cateta alăturată } \alpha}{ip}$	$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{cateta alăturată } \alpha}{\text{cateta opusă } \alpha}$

Triunghiul echilateral		
are toate laturile egale; are toate α de 60°		
$P = 3 \cdot l$	$A_{\Delta} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$	$h = \frac{l \sqrt{3}}{2}$

Subiectul II.1
ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE
ECUAȚII LINIARE

PERMUTĂRI

Permutare de grad n - definiție	$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
Permutarea identică de gradul n	$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}$
Transpoziție	$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & k & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & k & \dots & j-1 & i & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}$
Inversa unei permutări	$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}$ apoi se ordonează prima linie
Compunerea permutărilor	$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\delta(1)) & \sigma(\delta(2)) & \dots & \sigma(\delta(n)) \end{pmatrix}$
Inversiune a unei permutări	Perechea (i, j) cu $i < j$ se numește inversiune a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$ $m(\sigma) = \text{numărul inversiunilor permutării } \sigma$
Semnul (signatura) unei permutări - definiție	$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$
Semnul (signatura) unei permutări - proprietăți	$\varepsilon(\sigma\delta) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta) \text{ și } \varepsilon(\sigma^n) = (\varepsilon(\sigma))^n$
Permutare pară	σ este permutare pară dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$
Permutare impară	σ este permutare impară dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$

MATRICE. DETERMINANȚI

Matrice pătratică de ordin n	Matrice cu n linii și n coloane
Matricea unitate de ordin n - <i>definiție</i>	$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matricea unitate de ordin n - <i>proprietate</i>	$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Matricea nulă de tipul (m, n)	$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Urma unei matrice pătratică	$tr(A)$ = suma elementelor de pe diagonala principală
Transpusa unei matrice - <i>definiție</i>	A^t = se obține din matricea A prin transformarea liniilor în coloane și a coloanelor în linii
Transpusa unei matrice - <i>proprietate</i>	$(AB)^t = B^t A^t$
Relația lui Hamilton - Cayley	$X^2 - tr(X) \cdot X + det(X) \cdot I_2 = O_2$
Determinantul de ordin 2	$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
Proprietăți ale determinanților	Un determinant cu elementele unei linii/coloane nule are valoarea 0.
	Un determinant cu două linii/coloane identice are valoarea 0.
	$det(A^t) = det(A)$
	$det(A \cdot B) = det A \cdot det B$
	$det(A^n) = (det A)^n$
	Dacă la elementele unui linii/coloane se adună elementele altei linii/coloane înmulțite eventual cu același număr, atunci valoarea determinantului nu se modifică.

Matrice inversabile	A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
	Inversa unei matrice Pas 1. Se calculează $\det A \neq 0$ Pas 2. Se determină matricea <i>transpusă</i> A^t Pas 3. Se determină matricea <i>adjunctă</i> $A^* = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ determinantul obținut din A^t prin eliminarea liniei i și coloanei j Pas 4. Se calculează <i>inversa</i> matricei $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$
Ecuții matriceale	$A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B, \det A \neq 0$
	$X \cdot A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}, \det A \neq 0$
	$A \cdot X \cdot C = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}, \det A \neq 0, \det C \neq 0$

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Rangul unei matrice	$\text{rang } A = r \Leftrightarrow \exists$ un minor de ordin r al lui A nenul ($\neq 0$) și toți minorii de ordin $r + 1$ sunt nuli (0)
----------------------------	---

Stabilirea compatibilității unui sistem linear și rezolvarea lui

A – matricea sistemului

A – matrice pătratică

Stabilirea compatibilității	
Se calculează $\det A$	
$\det A \neq 0 \Rightarrow$ sistem compatibil determinat/ sistem cu soluție unică/ sistem de tip Cramer	$\det A = 0$
	1. Se determină $\text{rang}(A) \Rightarrow m_p$ (minorul principal)
	2. Se calculează minorii caracteristici m_c Numărul m_c = numărul ecuațiilor secundare
	3. Dacă $\exists m_c \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil Dacă toți $m_c = 0 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat (o infinitate de soluții)
Rezolvarea sistemului	
$x = \frac{\Delta_x}{\det A} \quad y = \frac{\Delta_y}{\det A} \quad z = \frac{\Delta_z}{\det A}$	Se stabilesc ecuațiile principale și secundare
	Se stabilesc necunoscutele principale și secundare Necunoscute secundare = $\alpha, \beta \dots$
	<i>Un sistem cu o necunoscută secundară = sistem compatibil simplu nedeterminat</i>
	<i>Un sistem cu două necunoscute secundare = sistem compatibil dublu nedeterminat</i>
Se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale	

A - nu este matrice pătratică

\bar{A} - matricea extinsă a sistemului

Stabilirea compatibilității
1. Se determină $\text{rang}(A) \Rightarrow m_p$ (minorul principal)
2. Se calculează minorii caracteristici m_c Numărul m_c = numărul ecuațiilor secundare
3. Dacă $\exists m_c \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil Dacă toți $m_c = 0 \Rightarrow$ sistem compatibil Dacă $\nexists m_c \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \bar{A} \stackrel{K.C.}{\Rightarrow}$ sistem compatibil
Rezolvarea sistemului
Se stabilesc ecuațiile principale și secundare
Se stabilesc necunoscutele principale și secundare Necunoscute secundare = $\alpha, \beta \dots$ Dacă \exists necunoscute secundare \Rightarrow sistem compatibil nedeterminat Dacă \nexists necunoscute secundare \Rightarrow sistem compatibil determinat
<i>Un sistem cu o necunoscută secundară = sistem compatibil simplu nedeterminat</i> <i>Un sistem cu două necunoscute secundare = sistem compatibil dublu nedeterminat</i>
Se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale

Subiectul II.2

LEGI DE COMPOZIȚIE PE O MULȚIME

Proprietățile legilor de compoziție ($M \neq \emptyset$)	
Parte stabilă	$x \circ y \in M, \forall x, y \in M$
Asociativitate	$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in M$
Comutativitate	$x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in M$
Element neutru	$\exists e \in M$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M$
Elemente simetrizabile	$x \in M$ element simetrizabil dacă $\exists x' \in M$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$ x' = simetricul elementului x $\mathcal{U}(M)$ = mulțimea elementelor simetrizabile din M în raport cu legea „ \circ ”

Structuri algebrice	
Monoid	(M, \circ) monoid comutativ (abelian) dacă 1. M este parte stabilă în raport cu legea „ \circ ” 2. „ \circ ” este asociativă 3. „ \circ ” admite element neutru 4. „ \circ ” este comutativă
Grup	(G, \circ) grup comutativ (abelian) dacă 1. G este parte stabilă în raport cu legea „ \circ ” 2. „ \circ ” este asociativă 3. „ \circ ” admite element neutru 4. $\mathcal{U}(G) = G$ 5. „ \circ ” este comutativă
Inel	$(A, \circ, *)$ inel comutativ dacă 1. (A, \circ) este grup comutativ 2. $(A, *)$ este monoid comutativ 3. Distributivitatea operației „ $*$ ” față de „ \circ ” $D_s: x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in M$ $D_d: (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \forall x, y, z \in M$
Corp	$(A, \circ, *)$ corp comutativ dacă 1. (A, \circ) este grup comutativ (e_\circ = element neutru) 2. $(A - \{e_\circ\}, *)$ este grup comutativ 3. Distributivitatea operației „ $*$ ” față de „ \circ ” $D_s: x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in M$ $D_d: (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \forall x, y, z \in M$

Morfisme de grupuri	
Fie (G_1, \circ) și $(G_2, *)$ două grupuri	$f: G_1 \rightarrow G_2$ este <i>izomorfism</i> de grupuri dacă 1. f este <i>morfism</i> de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G_1$ 2. f bijectivă
	<i>Proprietate:</i> $f(e_1) = e_2$
Morfisme de inele	
Fie $(G_1, *, \circ)$ și (G_2, \perp, \top) două inele	$f: G_1 \rightarrow G_2$ este <i>izomorfism</i> de inele dacă 1. f este <i>morfism</i> de inele dacă a. $f(x * y) = f(x) \perp f(y), \forall x, y \in G_1$ b. $f(x \circ y) = f(x) \top f(y), \forall x, y \in G_1$ c. $f(e_\circ) = e_\top$ 2. f bijectivă
	<i>Proprietate:</i> $f(e_*) = e_\perp$
Subgrupuri	
Fie (G, \circ) și $H \subset G$	(H, \circ) este <i>subgrup</i> al lui G dacă $\forall x, y \in H \Rightarrow x \circ y' \in H$ <i>sau</i> 1. $\forall x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$ 2. $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$

POLINOAME

Forma algebrică a unui polinom	$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ $K[X] = \text{mulțimea polinoamelor cu coeficienți în corpul } K$
Suma coeficienților unui polinom	Suma coeficienților polinomului $f = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) = f(1)$
Gradul unui polinom	$\text{grad } f = \text{cel mai mare exponent al lui } X$
Polinoame particulare	Polinomul constant: $f = c, c \in K^*$ Gradul polinomului constant = 0
	Polinomul nul: $f = 0$ Gradul polinomului constant = $-\infty$ Un polinom devine polinom nul dacă toți coeficienții polinomului sunt 0.
Teorema împărțirii cu rest	$f = g \cdot c + r, \quad \text{grad } r < \text{grad } g$ $f = \text{deîmpărțit}$ $g = \text{împărțitor}$ $c = \text{cât}$ $r = \text{rest}$
Teorema restului	$f: (X - a) \Rightarrow r = f(a)$
Divizibilitatea polinoamelor	$f : g \Leftrightarrow r = 0$
	$f : (X - a) \Leftrightarrow f(a) = 0$
	$f : (g \cdot h) \Leftrightarrow f : g \text{ și } f : h$
Rădăcini ale polinoamelor	$x = a \text{ rădăcină} \Leftrightarrow f(a) = 0$
	$x = a \text{ rădăcină} \Leftrightarrow f : (X - a) \text{ (Th. Bezout)}$
	$x = a \text{ rădăcină dublă} \Leftrightarrow f : (X - a)^2$ $x = a \text{ rădăcină dublă} \Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ și } f'(a) = 0$
Polinoame ireductibile	$f \in K[X]$ este polinom <i>reductibil</i> peste corpul K dacă $\exists g, h \in K[X], \text{grad } g \geq 1 \text{ și } \text{grad } h \geq 1 \text{ a.î. } f = g \cdot h.$ $f \in K[X], \text{grad } g \geq 1$ este polinom <i>ireductibil</i> peste corpul K dacă f nu este reductibil peste K .
Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili	$f \in \mathbb{C}[X], f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0;$ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \text{ rădăcinile polinomului}$ $f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$

Relațiile lui Viete pentru polinoame de grad 3	$f = aX^3 + bX^2 + cX + d, a \neq 0$ cu x_1, x_2, x_3 rădăcini $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$ $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ $S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$
	<i>Suma pătratelor rădăcinilor</i> $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$
	Ecuția algebrică de gradul 3 cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 este $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$
Relațiile lui Viete pentru polinoame de grad 4	$f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e, a \neq 0$ cu x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcini $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$ $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$ $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$ $S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$
	<i>Suma pătratelor rădăcinilor</i> $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = S_1^2 - 2S_2$
	Ecuția algebrică de gradul 4 cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 este $x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$
Ecuții algebrice cu coeficienți în \mathbb{Z}	Rădăcinile întregi ale unei ecuații algebrice cu coeficienți în \mathbb{Z} \in Divizorilor termenului liber
	Rădăcinile raționale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți în \mathbb{Z} sunt de forma $\frac{p}{q}$ unde $p \in$ Divizorilor termenului liber și $q \in$ Divizorilor coeficientului dominant
Ecuții algebrice cu coeficienți în \mathbb{Q}	$f \in \mathbb{Q}[X]$ $x_1 = a + \sqrt{b}$ rădăcină a lui f $\Big \Rightarrow x_2 = a - \sqrt{b}$ rădăcină a lui f
Ecuții algebrice cu coeficienți în \mathbb{R}	$f \in \mathbb{R}[X]$ $x_1 = a + bi$ rădăcină a lui f $\Big \Rightarrow x_2 = a - bi$ rădăcină a lui f

<p>Ecuții reciproce de gradul 3</p>	<p>Ecuția reciprocă de grad 3 $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ are rădăcina $x_1 = -1$ $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$</p>
<p>Ecuții reciproce de gradul 4</p>	<p>Ecuția reciprocă de grad 4 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \mid \cdot \frac{1}{x^2} (x \neq 0) \Leftrightarrow$ $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ $\xrightarrow{x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2}$ $at^2 + bt + c - 2a = 0$</p>

Subiectul III.1

ELEMENETE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ CLASA a XI – a

Derivatele funcțiilor elementare

Nr. Crt.	Derivate simple	Derivate compuse
1	$c' = 0$	
2	$x' = 1$	
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u(x)^n)' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot (u(x))'$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot (u(x))'$
5	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sqrt[3]{u(x)})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(u(x))^2}} \cdot (u(x))'$
6	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}} \cdot (u(x))'$
7	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a \cdot (u(x))'$
8	$(e^x)' = e^x$	$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot (u(x))'$
9	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot (u(x))'$
10	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x) \ln a} \cdot (u(x))'$
11	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot (u(x))'$
12	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot (u(x))'$
13	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot (u(x))'$
14	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot (u(x))'$
15	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}} \cdot (u(x))'$
16	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}} \cdot (u(x))'$
17	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+u(x)^2} \cdot (u(x))'$
18	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u(x))' = -\frac{1}{1+u(x)^2} \cdot (u(x))'$

Reguli de derivare
$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, y_0 = f(x_0)$

Șiruri

Mărginire și monotonie	
Mărginire	$(a_n)_{n \geq 1}$ <u>mărginit inferior</u> dacă $\exists m \in \mathbb{R}$ a.î. $a_n \geq m, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n \geq 1}$ <u>mărginit superior</u> dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ a.î. $a_n \leq M, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n \geq 1}$ <u>mărginit</u> dacă șirul este mărginit inferior și superior
Monotonie	$(a_n)_{n \geq 1}$ <u>monoton crescător</u> dacă $a_{n+1} - a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este <u>monoton crescător</u> dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n \geq 1}$ <u>monoton descrescător</u> dacă $a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este <u>monoton descrescător</u> dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n \geq 1}$ <u>strict crescător</u> dacă $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este <u>strict crescător</u> dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n \geq 1}$ <u>strict descrescător</u> dacă $a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este <u>strict descrescător</u> dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \forall n \geq 1$

Convergența	Un șir este <i>convergent</i> dacă acesta are limita finită.
	Un șir este <i>divergent</i> dacă are limita $\pm\infty$ sau nu are limită ($\nexists \lim$).
	Un șir este convergent dacă este monoton și mărginit. (Proprietatea lui Weierstrass)
Limite de șiruri – cazuri de nedeterminare (idei de rezolvare)	
Cazul $\frac{\infty}{\infty}$	<p style="text-align: center;">Factor comun forțat</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \nexists, & \text{dacă } q \leq -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ \infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">Lema lui Stolz - Cesaro</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$ <p>unde $(b_n)_{n \geq 1}$ șir strict crescător, nemărginit și cu termeni pozitivi</p> <p style="text-align: center;">Criteriul raportului</p> <p>$(a_n)_{n \geq 1}$ cu termeni strict pozitivi. Dacă</p> $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \text{ atunci:}$ <p>1) $l \in [0, 1)$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$</p> <p>2) $l \in (1, \infty)$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$</p> <p>3) $l = 1$ atunci nu putem afirma nimic despre limita șirului</p> <p style="text-align: center;">Regula lui l'Hospital</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ și } f(n) = a_n$ <p>Se calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ cu regula lui l'Hospital .</p> <p style="text-align: center;">$\xrightarrow{T \text{ Heine}}$ Pentru $x_n = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ avem</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$
Cazul $\infty - \infty$	<p style="text-align: center;">Factor comun forțat</p> <p style="text-align: center;">SAU</p> <p style="text-align: center;">Amplificarea cu expresia conjugată (la limitele cu radicali)</p> <p style="text-align: center;">SAU</p> <p style="text-align: center;">Proprietățile logaritmilor (la limitele cu ln)</p> $\ln a_n - \ln b_n = \ln \frac{a_n}{b_n}$

Cazul $\frac{0}{0}$	Limite remarcabile
Cazul $\infty \cdot 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \text{ sau } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1 \text{ sau } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin a_n}{a_n} = 1 \text{ sau } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} a_n}{a_n} = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{a_n} - 1}{a_n} = \ln b$ <p>unde $a_n \rightarrow 0$</p>
Cazul 1^∞	$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e, \text{ unde } a_n \rightarrow 0$
Cazul 0^0 sau ∞^0	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln a_n^{b_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n \ln a_n}$ <p>Criteriul radicalului</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$ <p>$(a_n)_{n \geq 1}$ cu termeni strict pozitivi</p>

Funcții

Limite de funcții	
Limite laterale	$l_s(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$
	$l_d(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$
	$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0)$
Cazuri de nedeterminare (idei de rezolvare)	
Cazul $\frac{\infty}{\infty}$	<p>Factor comun forțat</p> <p>Regula lui l'Hospital</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))'}{(g(x))'}$
Cazul $\infty - \infty$	<p>Factor comun forțat</p> <p>SAU</p> <p>Amplificarea cu expresia conjugată (la limitele cu radicali)</p> <p>SAU</p> <p>Proprietățile logaritmilor (la limitele cu ln)</p> $\ln f(x) - \ln g(x) = \ln \frac{f(x)}{g(x)}$

<p style="text-align: center;">Cazul $\frac{0}{0}$</p>	<p style="text-align: center;">Limite remarcabile</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \text{ sau } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1 \text{ sau}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1 = 1 \text{ sau } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1 + u(x))}{u(x)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a$ <p style="text-align: center;">unde $u(x) \rightarrow 0$</p> <p style="text-align: center;">Regula lui l'Hospital</p>												
<p style="text-align: center;">Cazul $\infty \cdot 0$</p>	<p style="text-align: center;">Limite remarcabile</p> <p style="text-align: center;">Regula lui l'Hospital</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} \text{ sau } = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g(x))'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$												
<p style="text-align: center;">Cazul 1^∞</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e, \text{ unde } u(x) \rightarrow 0$												
<p style="text-align: center;">Cazul 0^0 sau ∞^0</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)}$												
Asimptote													
<p style="text-align: center;">Asimptote orizontale la $\pm\infty$</p>	<p style="text-align: center;">$y = m, m$ finit</p> $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$												
<p style="text-align: center;">Asimptote oblice la $\pm\infty$</p>	<p style="text-align: center;">$y = mx + n, m$ finit și nenul și n finit</p> $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$												
<p style="text-align: center;">Asimptote verticale</p>	<p style="text-align: center;">$x = x_0$ este <i>asimptotă verticală</i> dacă cel puțin o limită laterală a funcției f în punctul x_0 este infinită</p>												
<p style="text-align: center;">Câteva rezultate utile în calcularea limitelor!</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td>$\frac{1}{0_+} = +\infty$</td> <td>$\frac{1}{0_-} = -\infty$</td> <td>$\frac{nr}{\pm\infty} = 0$</td> </tr> <tr> <td colspan="2">$\ln 0 = -\infty$</td> <td>$\ln \infty = \infty$</td> </tr> <tr> <td colspan="2">$e^{-\infty} = 0$</td> <td>$e^\infty = \infty$</td> </tr> <tr> <td colspan="2">$\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$</td> <td>$\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{1}{0_+} = +\infty$	$\frac{1}{0_-} = -\infty$	$\frac{nr}{\pm\infty} = 0$	$\ln 0 = -\infty$		$\ln \infty = \infty$	$e^{-\infty} = 0$		$e^\infty = \infty$	$\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$		$\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{0_+} = +\infty$	$\frac{1}{0_-} = -\infty$	$\frac{nr}{\pm\infty} = 0$											
$\ln 0 = -\infty$		$\ln \infty = \infty$											
$e^{-\infty} = 0$		$e^\infty = \infty$											
$\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$		$\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$											

Funcții continue									
f continuă în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$									
Proprietate lui Cauchy - Bolzano	$f: I \rightarrow R$ o funcție continuă pe I și $a, b \in I, a < b$ \Rightarrow ecuația $f(a) \cdot f(b) < 0$ $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b)								
Semnul unei funcții continue	O funcție continuă are același semn pe un intervalul în care nu are zerouri.								
Funcții derivabile									
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$									
Ecuția tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = x_0$	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$								
	$m_{tg} = f'(x_0)$ - panta tangentei								
f derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ finite									
f are derivată în $x_0 \Leftrightarrow f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$									
Puncte de întoarcere	x_0 este <i>punct de întoarcere</i> al funcției f dacă f este continuă în x_0 și $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ infinite								
Puncte unghiulare	x_0 este <i>punct unghiular</i> al funcției f dacă f este continuă în x_0 și $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și cel puțin o derivată laterală este finită								
Teorema lui Fermat	$f: [a, b] \rightarrow R, x_0 \in (a, b)$ un punct de extrem al funcției. Dacă f este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0) = 0$								
Teorema lui Lagrange	f continuă pe $[a, b]$ $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ a.î. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ f derivabilă pe (a, b)								
Teorema lui Rolle	f continuă pe $[a, b]$ $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ a.î. $f'(c) = 0$ f derivabilă pe (a, b) $f(a) = f(b)$								
Șirul lui Rolle	Se aplică pentru determinarea numărului de soluții reale ale ecuației $f(x) = 0$ Etape: 1) Se determină $f'(x)$ 2) Se rezolvă $f'(x) = 0$ 3) <table style="margin-left: 40px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">x</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 150px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$f'(x)$</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">Ș.R.</td> <td></td> </tr> </table>	x		$f'(x)$		$f(x)$		Ș.R.	
x									
$f'(x)$									
$f(x)$									
Ș.R.									

Rolul derivatei I	$f'(x) \geq 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ este (monoton) crescătoare pe I $f'(x) \leq 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ este (monoton) descrescătoare pe I						
	<i>Determinarea intervalelor de monotonie și a punctelor de extrem</i> <p style="text-align: center;">Etape:</p> <p style="text-align: center;">Se determină $f'(x)$ Se rezolvă $f'(x) = 0$</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">x</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 150px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$f'(x)$</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> </table>	x		$f'(x)$		$f(x)$	
	x						
$f'(x)$							
$f(x)$							
<p style="text-align: center;"><i>Enunțuri care se rezolvă cu derivata I</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Să se determine intervalelor de monotonie ✓ Să se determine punctelor de extrem ✓ Să se demonstreze că f este (strict) crescătoare/descrescătoare ✓ Să se demonstreze inegalități cu ajutorul punctelor de extrem ✓ Să se determine imaginea (mulțimea de valori) unei funcții ✓ Să se demonstreze că o funcție este mărginită ✓ Să se demonstreze bijectivitatea unei funcții <ul style="list-style-type: none"> ○ f injectivă $\Leftrightarrow f$ strict monotonă pe domeniu ○ f surjectivă $\Leftrightarrow \text{Im}f = \text{codomeniu}$ 							
Rolul derivatei a II -a	$f''(x) \geq 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ este convexă pe I $f''(x) \leq 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ este concavă pe I						
	<p style="text-align: center;">$x = x_0$ punct de inflexiune dacă</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ f continuă în x_0 ✓ f are derivată în x_0 ✓ f este concavă de o parte a lui x_0 și convexă de cealaltă parte a lui x_0. 						
	<p style="text-align: center;"><i>Determinarea intervalelor de concavitate/convexitate și a punctelor de inflexiune</i></p> <p style="text-align: center;">Etape:</p> <p style="text-align: center;">Se determină $f''(x)$ Se rezolvă $f''(x) = 0$</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">x</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 150px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$f''(x)$</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> </table>	x		$f''(x)$		$f(x)$	
x							
$f''(x)$							
$f(x)$							

Subiectul III.2

ELEMENETE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ CLASA a XII – a

Primitive

Definiție	<p>F este primitivă a funcției f dacă</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. F derivabilă pe D 2. $F'(x) = f(x), \forall x \in D$
Pentru a determina/a calcula primitiva unei funcții se folosește $F(x) = \int f(x)dx$.	
Pentru a demonstra/a arăta enunțuri care implică primitive se folosește definiția primitivei .	
Pentru a demonstra că o funcție admite primitive pe D se arată că funcția este continuă pe D .	
Metoda integrării prin părți	
$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$	

Integrale definite

Formula lui Leibniz - Newton	$\int_a^b f(x) dx = F(x) _a^b = F(b) - F(a)$
Proprietăți	$\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \text{ dacă } f \text{ impară și } a > 0$
	$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \text{ dacă } f \text{ pară și } a > 0$
	$\int_a^a f(x)dx = 0, a \in \mathbb{R}$
Teorema de medie	<p>$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$ a.î.</p> $\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$
Proprietatea de pozitivitate	$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$
Proprietatea de monotonie	$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
Proprietatea de aditivitate la interval	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c \in [a, b]$
Metoda integrării prin părți	$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) _a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$

Integrale nedefinite

1	$\int 1 dx = \int dx = x + \mathcal{C}$	
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$	$\int u^n(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + \mathcal{C}$
3	$\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}$	$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) dx = e^{u(x)} + \mathcal{C}$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$	$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + \mathcal{C}$
5	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) dx = \ln u(x) + \mathcal{C}$
6	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{u^2(x) - a^2} \cdot u'(x) dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u(x)-a}{u(x)+a} \right + \mathcal{C}$
7	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{u^2(x) + a^2} \cdot u'(x) dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{a} + \mathcal{C}$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) - a^2}} \cdot u'(x) dx = \ln \left u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2} \right + \mathcal{C}$
9	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) + a^2}} \cdot u'(x) dx = \ln \left(u(x) + \sqrt{u^2(x) + a^2} \right) + \mathcal{C}$
10	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}} \cdot u'(x) dx = \arcsin \frac{u(x)}{a} + \mathcal{C}$
11	$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$	$\int \sin u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + \mathcal{C}$
12	$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$	$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + \mathcal{C}$
13	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + \mathcal{C}$	$\int \operatorname{tg} u(x) \cdot u'(x) dx = -\ln \cos u(x) + \mathcal{C}$
14	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + \mathcal{C}$	$\int \operatorname{ctg} u(x) \cdot u'(x) dx = \ln \sin u(x) + \mathcal{C}$
15	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x) dx = -\operatorname{ctg} u(x) + \mathcal{C}$
16	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$	$\int \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x) dx = \operatorname{tg} u(x) + \mathcal{C}$

Aplicații ale integralei definite

Aria unei suprafețe plane delimitate de graficul funcției f , axa O_x și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = b$	$\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx$
Aria suprafeței plane cuprinse între două curbe	$\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$
Volumul unui corp de rotație determinat de graficul funcției $f: [a, b] \rightarrow R$	$\text{Vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$